Кинетическая энергия тела, рассматриваемая относительно системы (ξ, η, ζ), уменьшается вследствие испускания света, и притом на величину, не зависящую от свойств тела. Далее, разность $K_0 - K_1$ зависит от скорости точно так же, как кинетическая энергия электрона (§ 10 предыдущей статьи).

Пренебрегая величинами четвертого и высших порядков, мы можем положить

$$K_0 - K_1 = \frac{L}{V^2} \cdot \frac{v^2}{2}.$$

Из этого уравнения непосредственно следует, что если тело отдает энергию L в виде излучения, то его масса уменьшается на $\frac{L}{V^2}$. Здесь, очевидно, не существенно, что энергия, отнятая у тела, переходит в лучистую энергию, так что мы приходим к более общему выводу:

Масса тела есть мера содержания энергии в этом теле; если энергия изменяется на величину L, то масса изменяется в том же направлении на величину $\frac{L}{9 \cdot 10^{20}}$, причем энергия измеряется в эргах, а масса — в граммах.

Не исключена возможность того, что проверка теории может удасться для тел, у которых содержание энергии в высшей степени изменчиво (например, у солей радия).

Если теория соответствует фактам, то излучение переносит инерцию между испускающими и поглощающими телами.

Берн, сентябрь 1905 г.
(Поступило в печать 27 сентября 1905 г.)

Г. МИНКОВСКИЙ

Г. МИНКОВСКИЙ.

ПРОСТРАНСТВО И ВРЕМЯ [1]).

М. Г.! Воззрения на пространство и время, которые я намерен перед вами развить, возникли на экспериментально-физической основе. В этом их сила. Их тенденция радикальна. Отныне пространство само по себе и время само по себе должны обратиться в фикции и лишь некоторый вид соединения обоих должен еще сохранить самостоятельность.

I.

Сначала я намерен показать, как можно, исходя из ныне принятой механики, пожалуй при помощи чисто математического рассуждения, притти к новым идеям относительно пространства и времени. Уравнения ньютоновой механики обнаруживают двойную инва, риантность. Их форма сохраняется, во-первых, тогда, когда положенную в основу пространственную координатную систему подвергают любому *изменению положения*, и, во-вторых, тогда, когда состояние движения этой системы подвергается изменению, именно — когда этой системе сообщается какое-нибудь *равномерное поступательное движение*; нулевая точка времени также не играет никакой роли. Чувствуя себя

---

[1]) „Raum und Zeit". Доклад, сделанный 21 сентября 1908 г. на 80-м собрании немецких естествоиспытателей и врачей в Кельне Phys. ZS. **10**, 104, 1909.

зрелыми для перехода к аксиомам механики, мы привыкли считать аксиомы геометрии уже установленными раньше; поэтому эти две инвариантности, вероятно, редко формулируются вместе, так сказать, не переводя дыхания. Каждая из них означает определенную замкнутую группу преобразований дифференциальных уравнений механики. Существование первой группы рассматривают как основной признак пространства. Ко второй группе охотнее всего относятся с презрением, с тем, чтобы затем легкомысленно пройти мимо того обстоятельства, что, исходя из физических явлений, никогда нельзя решить, не находится ли все-таки пространство, предполагаемое покоящимся, в равномерном поступательном движении. Указанные две группы ведут таким образом совершенно обособленное существование. Их совершенно разнородный характер, вероятно, и препятствовал объединению. Но как раз объединенная полная группа, как целое, дает пищу для нашей мысли.

Мы попытаемся изучаемые соотношения сделать наглядными графически. Пусть x, y, z будут прямоугольными координатами пространства и пусть t обозначает время. Предметом нашего восприятия всегда являются только места и времена, вместе взятые. Никто еще не наблюдал какого-либо места иначе, чем в некоторый момент времени, и какое-нибудь время иначе, чем в некотором месте. Но я еще отношусь с почтением к догмату, гласящему, что и пространство и время имеют независимое существование. Я буду называть пространственную точку, рассматриваемую в какой-нибудь момент времени, т. е. систему значений x, y, z, t, *мировой точкой*. Пусть многообразие всех мыслимых систем значений x, y, z, t называется *миром*. Я мог бы смело начертить мелом на доске четыре мировые оси. Уже *одна* начерченная ось, состоит из целого ряда колеблющихся молекул и участвует, вдобавок, в движении земли во вселенной, т. е. требует достаточно высокой абстракции. Несколько бо̀льшая абстракция, связанная с числом 4, не представляет затруднений для математика. Для того чтобы нигде не оставлять зияющей пустоты, мы представим себе, что в каждом месте и в каждый момент времени имеется некоторый объект для наблюдения. Чтобы не говорить о материи или электричестве, я буду пользоваться словом субстанция для обозначения этого объекта. Обратим наше внимание на субстанциальную точку, имеющуюся в мировой точке x, y, z, t, и вообразим, что мы в состоянии снова узнать эту субстанциальную точку во всякое другое время. Пусть элементу времени dt соответствуют изменения dx, dy, dz пространственных координат этой субстанциальной точки. Мы получаем тогда в качестве изображения, так сказать, вечного жизненного пути субстанциальной точки некоторую кривую в мире, *мировую линию*, точки которой можно однозначно отнести к параметру t во всем интервале от $-\infty$ до $+\infty$. Весь мир представляется разложенным на такие мировые линии, и мне хотелось бы сразу отметить, что, по моему мнению, физические законы могли бы найти свое наисовершеннейшее выражение как взаимоотношения между этими мировыми линиями.

Благодаря понятиям пространства и времени многообразие x, y, z при $t=0$ и его две стороны: $t>0$ и $t<0$ отделяются друг от друга. Если мы, ради простоты, закрепим нулевую точку пространства и времени, то первая из названных групп механики показывает, что мы можем подвергнуть оси x, y, z в момент $t=0$ любому вращению вокруг нулевой точки, соответственно однородным линейным преобразованиям выражения

$$x^2+y^2+z^2$$

в самого себя.

Вторая же группа означает, что мы, также не изменяя выражения механических законов, можем заменить x, y, z, t через

$$x-\alpha t,\quad y-\beta t,\quad z-\gamma t,\quad t,$$

с произвольно выбранными константами α, β, γ. На этом основании оси времени может быть дано совершенно произвольное направление в сторону верхней половины мира $t>0$. Каково же соотношение между требованием ортогональности в пространстве и этой полной свободой в выборе оси времени по направлению вверх? Для того чтобы установить это, возьмем некоторый положительный параметр c и рассмотрим геометрическую фигуру:

$$c^2t^2-x^2-y^2-z^2=1.$$

Подобно двуполому гиперболоиду она состоит из двух полостей, разделенных $t=0$. Рассмотрим полость в области $t>0$ и обратимся к тем однородным линейным преобразованиям старых переменных x, y, z, t в новые x', y', z', t', для которых выражение этой полости в новых переменных имеет такой же вид. К этим преобразованиям относятся, очевидно, вращения пространства около нулевой точки. Поэтому для полного понимания остальных преобразований достаточно рассмотреть те из них, у которых y и z остаются неизменными. Изобразим на чертеже пересечение полости с плоскостью осей x и t, т. е. верхнюю ветвь гиперболы $c^2t^2-x^2=1$, с ее асимп-

тотами. Проведем теперь от начала координат O произвольный радиус-вектор OA' этой ветви гиперболы, затем проведем касательную к ней в точке A' до пересечения с правой асимптотой в точке B', потом дополним $OA'B'$ до параллелограмма $OA'B'C'$ и, наконец, имея в виду дальнейшее, проведем $B'C'$ до пересечения с осью x в точке D'. Если мы теперь примем OC' и OA' за оси для отсчета координат x', t' с масштабами $OC'=1,\ OA'=\frac{1}{c}$, то

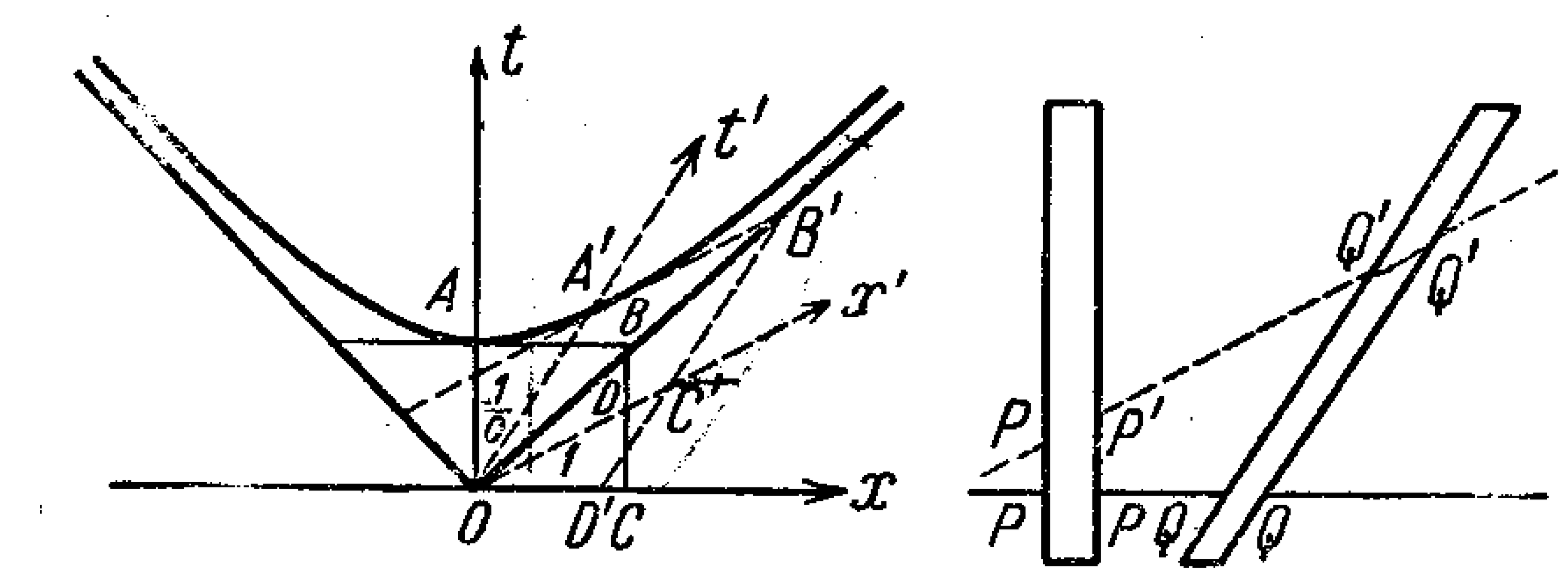

Рис. 1.

указанная ветвь гиперболы будет опять иметь своим выражением $c^2t'^2-x'^2=1,\ t'>0$, и переход от x, y, z, t к x', y, z, t' явится одним из искомых преобразований. Мы прибавим к описанным преобразованиям еще любые смещения пространственно-временной нулевой точки и создадим таким образом группу преобразований, все еще, очевидно, зависящую от параметра c; будем обозначать эту группу через G_c.

Пусть теперь c беспредельно возрастает, следовательно, $\frac{1}{c}$ стремится к нулю; из нашего рисунка ясно видно, что ветвь гиперболы будет все более и более приближаться к оси x, угол, образуемый асимптотами, будет увеличиваться, и что указанное специальное преобразование в пределе превратится в такое, при котором ось t' может иметь любое направление вверх, а ось x' все более и более приближается к оси x. Принимая все это во внимание, ясно, что из группы G_c в пределе при $c = \infty$, следовательно, для группы G_∞, получается как раз та полная группа, которая относится к ньютоновой механике. При таком положении вещей и имея в виду, что G_c математически понятнее, чем G_∞, математик в свободном полете фантазии мог бы напасть на мысль, что явления природы, в конце концов, действительно инвариантны не относительно группы G_∞, но скорее относительно группы G_c с определенным конечным c, которое только в обычных единицах измерения *чрезвычайно велико*. Такое предвосхищение было бы необыкновенным триумфом чистой математики. Математика в этом вопросе не оказалась находчивой; все же для нее остается удовлетворение, что она, благодаря своим более ранним счастливым предшественникам, с их дальновидным и острым умом, в состоянии теперь сразу же охватить глубоко идущие следствия подобной перестройки нашего миропонимания.

Я хочу теперь же указать, о каком значении c будет в итоге итти речь: c будет иметь значение *скорости распространения света в пустоте*. Для того чтобы не говорить ни о пространстве, ни о пустоте, мы можем опять охарактеризовать эту величину как отношение электромагнитной и электростатической единиц количества электричества.

Наличие инвариантности законов природы по отношению к указанной группе G_c нужно было бы понимать следующим образом.

Можно, пользуясь всей совокупностью явлений природы, посредством последовательно улучшающихся приближений определять со все возрастающей точностью некоторую координатную систему x, y, z и t — пространство и время, — при помощи которой эти явления находят себе выражение в виде определенных законов. Но при этом указанная координатная система определяется явлениями природы отнюдь не однозначно. Оказывается еще возможным, *соответственно преобразованиям указанной группы G_c, эту координатную систему произвольно изменять, не изменяя при этом выражения законов природы*. Например, возможно, в согласии с описанным рисунком, назвать также и величину t' временем, но тогда в связи с этим необходимо будет пространство определить посредством многообразия трех параметров x', y, z; причем теперь физические законы будут точно так же выражаться посредством x', y, z, t', как ранее, через координаты x, y, z, t. В соответствии с этим мы будем иметь в мире не одно пространство, а бесконечно много пространств, аналогично тому, как в трехмерном пространстве имеется бесконечно много плоскостей. Трехмерная геометрия становится главой четырехмерной физики. Вы понимаете теперь, почему я в введении сказал, что пространство и время должны стать фикциями, и только мир должен сохранить свое существование.

II.

Теперь возникает вопрос о том, какие обстоятельства навязывают нам измененное воззрение на пространство и время; действительно ли оно никогда не противоречит наблюдениям, и, наконец, удобнее ли с этой точки зрения описывать явления?

Прежде чем заняться этим, сделаем одно важное замечание.

Если мы каким-нибудь образом индивидуализировали пространство и время, то покоящейся субстанциальной точке соответствует в качестве мировой линии прямая, параллельная оси t; равномерно движущейся субстанциальной точке — прямая, наклоненная относительно t, неравномерно движущейся субстанциальной точке — каким-то образом искривленная мировая линия. Если мы в любой мировой точке x, y, z, t обратим внимание на проходящую там мировую линию и найдем, что она параллельна какому-нибудь радиусу-вектору OA' выше упомянутой полости гиперболоида, то мы можем ввести OA' в качестве новой оси времени; тогда субстанция в соответствующей мировой точке, с помощью таким образом введенных новых понятий пространства и времени, будет казаться покоящейся. Введем теперь следующую основную аксиому:

Субстанция, находящаяся в любой мировой точке, всегда при надлежащем определении пространства и времени может быть рассматриваема как находящаяся в покое.

Аксиома выражает ту мысль, что в каждой мировой точке выражение

$$c^2 dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$$

всегда положительно, или иначе, что всякая скорость v всегда меньше c. Сообразно с этим c является для всех субстанциальных скоростей верхним пределом и в этом как раз заключается более глубокое значение величины c. При таком понимании аксиома на первый взгляд кажется мало привлекательной. Но нужно принять во внимание, что теперь возникает новая механика, в которую входит квадратный корень из указанного дифференциального выражения второго порядка, и что поэтому случаи со скоростью, превышающей скорость света, будут играть такую же роль, как, например, в геометрии фигуры с мнимыми координатами.

Толчком и истинным поводом *к принятию группы* G_c послужило то обстоятельство, что дифференциальное уравнение для распространения световых волн в пустоте обладает этой группой G_c. [1]) С другой стороны, понятие твердого тела имеет смысл только лишь в механике с группой G_∞. Если имеется оптика с G_c, а с другой стороны имелись бы твердые тела, то легко усмотреть, что двумя относящимися к G_c и G_∞ гиперболоидными полостями выделялось бы *одно* единственное направление t; это обстоятельство повлекло бы за собой то следствие, что оказалось бы возможным, пользуясь надлежащими твердыми оптическими инструментами, заметить в лаборатории изменение явлений при различной ориентации приборов относительно направления движения земли. Все направленные к этой цели усилия, особенно знаменитый интерференционный опыт Майкельсона, дали все же отрицательный результат. Для того чтобы объяснить это, Лоренц предложил гипотезу, успех которой как раз связан с инвариантностью оптики по отношению к группе G_c. По Лоренцу каждое движущееся тело должно сократиться в направлении движения, именно, при скорости v в отношении

$$1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}.$$

Эта гипотеза звучит крайне фатастически. Ибо сокращение должно мыслиться не как результат сопротивления эфира, но как подарок, ниспосланный свыше, как побочное обстоятельство самого факта движения.

Я хочу теперь на нашем чертеже показать, что гипотеза Лоренца и новые воззрения на пространство

[1]) Важное применение этого факта встречается уже у В. Фохта, Göttinger Nachr. 1887, стр. 41.

и время вполне эквивалентны и что благодаря этому гипотеза делается гораздо понятнее. Если с целью упрощения отвлечься от y и z и представить себе пространственно одномерный мир, то параллельная полоса, стоящая прямо, как ось t, и параллельная полоса, наклоненная относительно оси t (рис. 1), суть графики покоящегося и равномерно движущегося тела, сохраняющего в обоих случаях одно и то же постоянное пространственное протяжение. Если прямая OA' параллельна второй полосе, то мы можем ввести t' как временную координату и x' как пространственную координату, и тогда второе тело представляется находящимся в покое, а первое — равномерно движущимся. Примем теперь, что первое тело имеет длину l, когда оно представляется покоящимся; это значит, что поперечное сечение PP первой полосы осью x равно $l \cdot OC$, где OC означает единицу масштаба на оси x; с другой стороны, мы допустим также, что и второе тело, *воспринятое как покоящееся*, имеет ту же длину l; последнее означает тогда, что поперечное сечение $Q'Q'$ второй полосы, измеренное параллельно оси x', равно $l \cdot OC'$. Эти два тела как бы олицетворяют два *одинаковых* лоренцовых электрона, один покоящийся и один равномерно движущийся. Если мы применяем первоначальные координаты x, t, то пространственным протяжением второго электрона будет сечение QQ полосы, ему соответствующей, произведенное *параллельно x-оси*. Так как $Q'Q' = l \cdot OC'$, то, очевидно, $QQ = l \cdot OD'$. Из простого расчета следует, что если $\frac{dx}{dt}$ для второй полосы $= v$, то

$$OD' = OC\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$$

и, следовательно, также

$$PP : QQ = 1 : \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Но в этом и заключается смысл гипотезы Лоренца о сокращении электронов во время движения. С другой стороны, если мы будем считать второй электрон покоящимся и, следовательно, будем пользоваться координатной системой x', t', то длиной первого электрона будет сечение $P'P'$ соответствующей ему полосы, проведенное параллельно OC', и мы найдем, что первый электрон по сравнению со вторым сократится в том же самом отношении, ибо из фигуры видно, что,

$$P'P' : Q'Q' = OD : OC' = OD' : OC = QQ : PP.$$

Лоренц назвал комбинацию t', связывающую x с t, *местным временем* и воспользовался физическим содержанием этого понятия для лучшего понимания гипотезы сокращения тел. Однако, признать с полною ясностью, что время одного электрона столь же хорошо, как и время другого, т. е., что t и t' должны расцениваться одинаково, явилось заслугой лишь Эйнштейна [1]). Тем самым и прежде всего время, как понятие однозначно определяемое событиями, было отвергнуто. Понятия пространства ни Эйнштейн ни Лоренц не касались, может быть, потому, что при вышеупомянутом специальном преобразовании, при котором плоскость x', t' совпадает с плоскостью x, t, возможно толкование, что ось x пространства сохраняет свое положение. Попытку перешагнуть через понятия пространства соответствующим образом в самом деле можно было бы расценить как

[1]) A. Einstein, Ann. d. Phys. 17, 891, 1905; Jahrb. d. Radioaktivität und Elektronik 4, 411, 1907.

некоторую дерзость математической мысли. Но после такого все-таки неизбежного шага для истинного понимания группы G_c термин *„постулат относительности“*, для требования инвариантности по отношению к группе G_c, кажется мне слишком бледным. Так как смысл постулата сводится к тому, что в явлениях нам дается только четырехмерный в пространстве и времени мир, но что проекции этого мира на пространство и на время могут быть взяты с некоторым произволом, мне хотелось бы этому утверждению скорее дать название: *постулат абсолютного мира* (или коротко: мировой постулат).

III.

Благодаря мировому постулату становится возможным равноправное оперирование с четырьмя величинами x, y, z, t. От этого, как будет показано ниже, выигрывает в ясности внешний вид, в котором проявляются физические законы. Прежде всего понятие об *ускорении* приобретает весьма резко очерченный характер.

Я воспользуюсь геометрическими образами, которые напрашиваются сами собой, когда, располагая тремя числами x, y, z, молча отвлекаются от одного из них — от z. Представим себе, что какая-нибудь произвольная мировая точка O сделана нулевой точкой пространства и времени.

Конус

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0$$

с вершиной в O (рис. 2) состоит из двух частей, одной части со значениями $t < 0$ и другой со значениями $t > 0$. Первая часть, *передний конус*, состоит, скажем мы, из всех мировых точек, которые „посылают свет в O“, вторая часть, *задний конус*, из всех

мировых точек, которые „получают свет из O“. Пусть область, ограниченная одним только передним конусом, именуется областью *по сю сторону от O*, а область, ограниченная одним только задним конусом — областью *по ту сторону от O*. По ту сторону от O лежит рассмотренная выше гиперболоидная полость

$$F = c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 1, \quad t > 0.$$

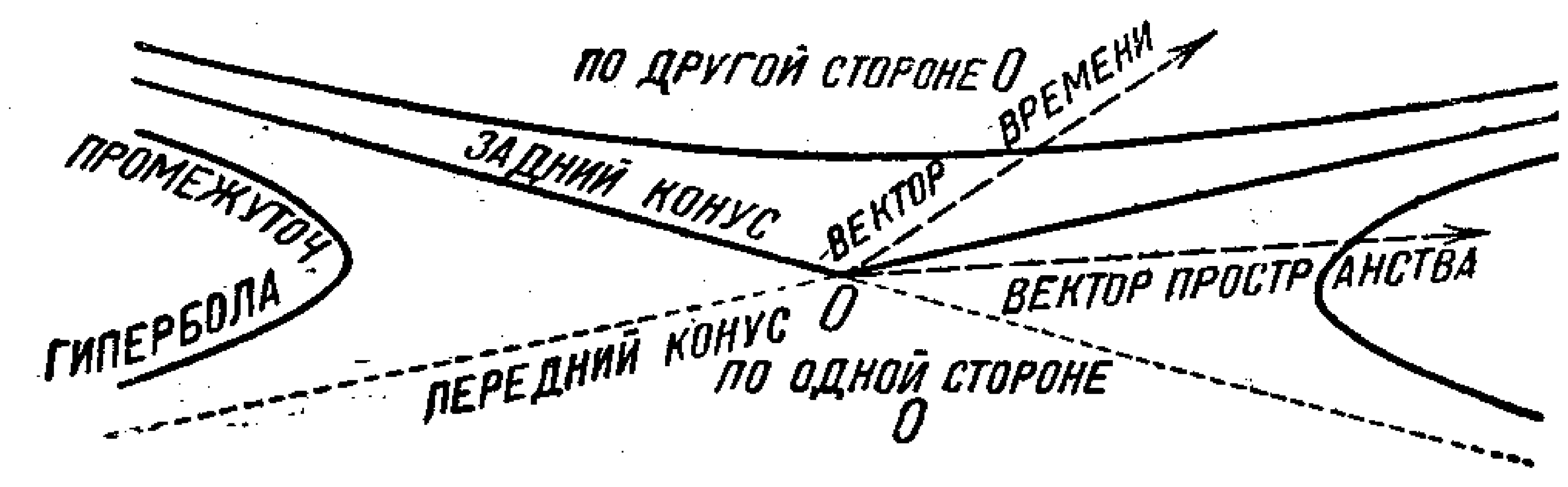

Рис. 2.

Область *между конусами* заполнена однополыми гиперболоидами:

$$-F = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2 = k^2,$$

при всех возможных постоянных положительных значениях k^2. Для нас важны гиперболы, имеющие центр в O и лежащие на указанных гиперболоидах. Пусть отдельные ветви этих гипербол коротко называются *промежуточными гиперболами с центром O*. Такая гиперболическая ветвь, мыслимая как мировая линия какой-нибудь субстанциальной точки, будет изображать движение, которое при $t = -\infty$ и $t = +\infty$ асимптотически достигает скорости света c.

Если мы назовем теперь, по аналогии с векторным понятием в пространстве, направленный отрезок в многообразии x, y, z, t *вектором*, то мы должны будем отличать *времени-подобные* векторы с направлениями от O к полости $+F=1$, $t>0$, от *пространственно-подобных* векторов с направлениями от O к $-F=1$. Ось времени может быть направлена параллельно любому вектору первого рода. Всякая мировая точка, находящаяся между передним и задним конусами в O, может быть сделана при помощи соответствующей координатной системы *одновременной* с O, но также и более *„ранней“*, чем O, или более *„поздней“*, чем O. Каждая мировая точка по эту сторону от O всегда будет более ранней, чем O, а каждая мировая точка по ту сторону от O всегда будет более поздней, чем O. Предельному случаю при $c=\infty$ будет соответствовать сжатие клинообразного выреза между конусами в плоское многообразие $t=O$. На рисунках этот вырез намеренно сделан различной ширины.

Разложим какой-нибудь произвольный вектор, как, например, вектор, направленный из O в точку x, y, z, t, на четыре *компоненты* x, y, z, t. Если направления двух векторов соответственно совпадают с направлением некоторого радиуса-вектора OR из O к одной из поверхностей $\mp F=1$ и с направлением касательной RS к указанной поверхности в точке R, то эти векторы будут называться *взаимно перпендикулярными*. Сообразно с этим

$$c^2tt_1 - xx_1 - yy_1 - zz_1 = 0$$

выражает условие взаимной перпендикулярности двух векторов с компонентами x, y, z, t и x_1, y_1, z_1, t_1.

Единичные масштабы *для численных значений* величин векторов различных направлений пусть будут установлены тем, что некоторому пространственно-подобному вектору, направленному из O к полости $-F=1$, всегда приписывается значение 1, и некоторому другому времени-подобному вектору, направленному

из O к $+F=1$, $t>0$ — всегда приписывается значение $\frac{1}{c}$.

Поэтому, если мы вообразим в какой-нибудь мировой точке P (x, y, z, t) проходящую через нее мировую линию некоторой субстанциальной точки, то времени-подобному векторному элементу dx, dy, dz, dt, расположенному по линии, будет соответствовать численное значение:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2}.$$

Мы называем интеграл от этой величины $\int d\tau = \tau$, взятый вдоль мировой линии от какой-нибудь закрепленной начальной точки P_0 до переменной конечной точки P, *собственным временем* субстанциальной точки в P. На мировой линии величины x, y, z, t, т. е. компоненты вектора OP, рассмотрим как функции собственного времени τ; обозначим их первые производные по τ через $\dot x$, $\dot y$, $\dot z$, $\dot t$, их вторые производные по τ через $\ddot x$, $\ddot y$, $\ddot z$, $\ddot t$, и назовем соответствующие векторы, а именно: производную от вектора OP по τ *вектором движения* в P и, производную от этого вектора движения по τ *вектором ускорения* в P. При этом имеют место следующие уравнения:

$$c^2\dot t^2 - \dot x^2 - \dot y^2 - \dot z^2 = c^2,$$

$$c^2\dot t\ddot t - \dot x\ddot x - \dot y\ddot y - \dot z\ddot z = 0,$$

это значит, что вектор движения есть времени-подобный вектор, имеющий направление мировой линии в P и численное значение равное единице, и что вектор ускорения в P перпендикулярен к вектору движения в P, и, следовательно, должен быть во всяком случае пространственно-подобным вектором.

Легко убедиться, что существует некоторая определенная ветвь гиперболы, имеющая с мировой линией в P три общие бесконечно близко расположенные точки; асимптоты этой ветви принадлежат к образующим одного переднего и одного заднего конуса (рис. 3). Назовем эту гиперболическую ветвь *гиперболой кривизны* в точке P. Если M — центр этой гиперболы, то, следовательно, здесь речь идет о некоторой промежуточной гиперболе с центром в M. Пусть ρ — величина вектора MP; мы видим, *что вектор ускорения в P есть вектор с направлением MP, и с численным значением* $\frac{c^2}{\rho}$.

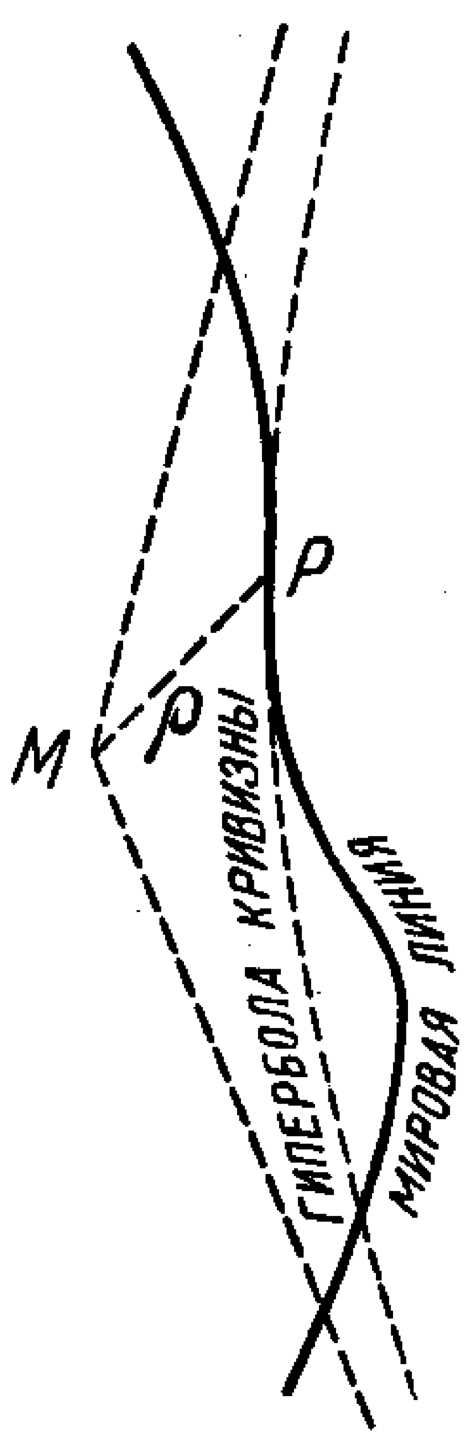

Рис. 3.

Если $\ddot{x} = \ddot{y} = \ddot{z} = \ddot{t} = 0$, то гипербола кривизны обращается в прямую, касательную к мировой линии в точке P, и ρ необходимо приравнять ∞.

IV.

Чтобы доказать, что принятие группы G_c для физических законов нигде не приводит к противоречию необходимо пересмотреть всю физику на основе допущения этой группы. Этот пересмотр уже и был в известной степени проведен в вопросах термодинамики и теплового излучения [1]), для электромагнитных явлений и, наконец, для механики при условии сохранения понятия массы [2]).

[1]) M. Planck, Zur Dynamik bewegter Systeme, Berliner Ber. 1907, стр. 542 и Ann. d. Phys. 26, 26, 1908.

[2]) H. Minkowski, Die Grundgleichungen für die elektromagnetischen Vorgänge, in bewegten Körpern, Göttingen Nachr. 1908, стр. 53.

В последней области необходимо прежде всего поднять следующий вопрос: если сила с компонентами X, Y, Z по пространственным осям приложена к мировой точке P (x, y, z, t), в которой вектор движения есть $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, $\dot{t}$, то в виде какой силы она должна быть воспринята при любом изменении координатной системы? Существуют некоторые определенные проверенные формулы для пондеромоторной силы в электромагнитном поле, применимые в тех случаях, когда вне всякого сомнения должна быть принята группа G_c. Эти формулы ведут к простому правилу: *при изменении координатной системы следует заданную силу определить численно как силу в новых пространственных координатах таким образом, чтобы соответствующий ей вектор с компонентами*

$$\dot{t}X,\ \dot{t}Y,\ \dot{t}Z,\ \dot{t}T,$$

остался бы при этом без изменения, причем

$$T = \frac{1}{c^2}\left(\frac{\dot{x}}{\dot{t}}X + \frac{\dot{y}}{\dot{t}}Y + \frac{\dot{z}}{\dot{t}}Z\right)$$

есть частное от деления мощности, развиваемой силой в мировой точке, на c^2. Этот вектор всегда перпендикулярен к вектору движения в P. Пусть этот силовой вектор, соответствующий силе в P, *называется движущим силовым вектором в точке P*.

Пусть теперь мировая линия, проходящая через P, описывается субстанциальной точкой с постоянной *механической массой m*. Пусть, далее m-кратный вектор движения в P называется *вектором импульса* в P, а m-кратный вектор ускорения в P — *силовым вектором движения* в P. На основе этих определений закон движения материальной точки при заданном движущем векторе силы гласит [1]):

Силовой вектор движения равен движущему вектору силы.

Эта формулировка объединяет четыре уравнения для компонент по четырем осям, причем четвертое уравнение может быть рассматриваемо, как следствие из первых трех, потому что оба упомянутых вектора с самого начала перпендикулярны к вектору движения. Согласно указанному значению T, четвертое уравнение, без сомнения, выражает закон сохранения энергии. Поэтому *c^2-кратное значение составляющей импульса по оси t* нужно определить как *кинетическую энергию* материальной точки. Выражение для нее имеет следующий вид:

$$mc^2 \frac{dt}{d\tau} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}.$$

Это выражение, после вычитания аддитивной постоянной mc^2, превращается в выражение $\frac{1}{2}mv^2$ ньютоновой механики с точностью до величины порядка $\frac{1}{c^2}$. При этом становится весьма наглядной *зависимость энергии от координатной системы.* Но так как ось t может иметь направление любого временноподобного вектора, то, с другой стороны, закон сохранения энергии, написанный для каждой возможной координатной системы, содержит уже всю систему уравнений движения. Этот факт при рассмотренном переходе к пределу при $c = \infty$ сохраняет свое значение и для аксиоматического построения механики Ньютона и был в этом смысле истолкован уже Шютцем [1]).

[1]) H. Minkowski, loc. cit. стр. 107. Ср. также M. Planck, Verh. d. Deutsch. Phys. Ges. 4, 136, 1906.

Соотношение между единицами длины и времени можно заранее установить таким, чтобы естественным пределом для скорости c была бы 1. Если ввести $\sqrt{-1}\cdot t = s$ вместо t, то квадратичное дифференциальное выражение $d\tau^2 = -dx^2 - dy^2 - dz - ds^2$ сделается вполне симметричным в отношении x, y, z, s, и эта симметрия переносится на каждый закон, который не противоречит мировому постулату. Сообразно с этим можно сущность этого постулата математически весьма выпуклым образом облечь в следующую мистическую формулу:

$$3 \cdot 10^5 \textit{км} = \sqrt{-1} \text{ сек.}$$

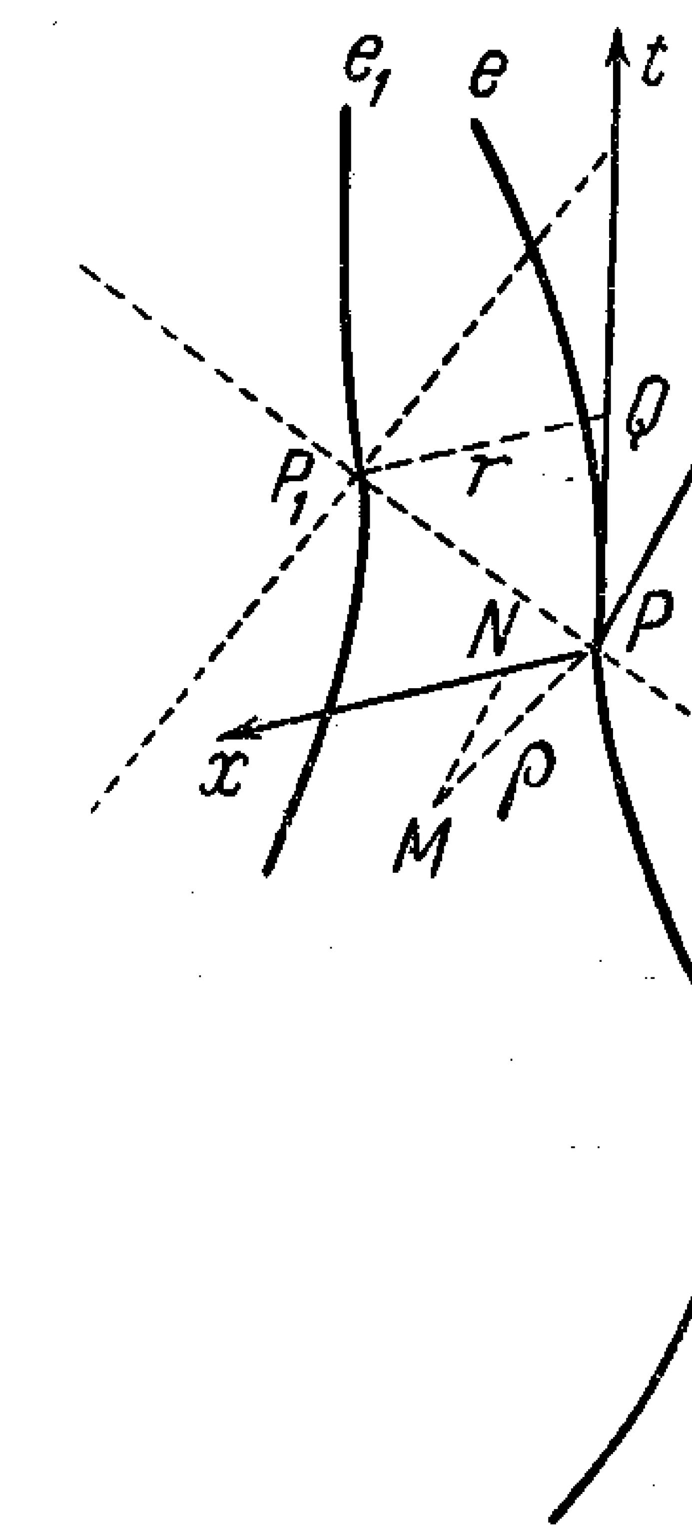

Рис. 4.

V.

Обусловленные мировым постулатом преимущества, может быть, ничем иным не доказываются так убедительно, как указанием тех действий, которые по теории Максвелла — Лоренца обусловливаются *движущимся произвольным образом точечным зарядом.* Вообразим себе мировую линию такого точечного электрона с зарядом e и нанесем на ней собственное время τ, начиная от какой-нибудь начальной точки. Для того чтобы получить в любой миро-

[1]) I. R. Schütz, Das Prinzip der absoluten Erhaltung der Energie, Göttinger Nachr. 1897, стр. 110.

вой точке P_1 вызванное электроном поле, построим передний конус, относящийся к P_1 (рис. 4). Последний пересекает неограниченную мировую линию электрона, очевидно, в одной единственной точке P, потому что направления мировой линии всюду те же, что и направления времени-подобных векторов. Мы проводим касательную к мировой линии в точке P и строим к ней нормаль P_1Q, идущую через P_1. Пусть численное значение P_1Q есть r. Согласно определению переднего конуса необходимо $\frac{r}{c}$ считать численным значением PQ. *Вектор с направлением PQ величины $\frac{e}{r}$ своими компонентами по осям x, y, z представляет векторный потенциал, помноженный на c, а своей компонентой по оси t — скалярный потенциал поля, возбужденного зарядом e, для мировой точки P_1.* В этом и заключается установленные Льенаром и Вихертом элементарные законы [1]).

При описании самого поля, вызванного электроном, оказывается далее, что деление поля на электрическую и магнитную силы относительно, если принять во внимание выбранную ось времени; лучше всего описывать обе силы вместе пользуясь некоторой, хотя и не совсем полной аналогией с вихревой силой в механике.

Я хочу теперь описать *пондеромоторное действие, производимое некоторым движущимся произвольным образом точечным зарядом на другой также произвольно движущийся точечный заряд*. Вообразим, что через мировую точку P_1 проведена мировая линия второго точечного электрона, имеющего заряд e_1. Мы определяем P, Q, r, как прежде, затем находим центр M гиперболы кривизны в P и, наконец, строим нормаль MN из точки M на прямую, проведенную через P параллельно QP_1. Мы устанавливаем теперь координатную систему с началом в точке P следующим образом: пусть ось t направлена по PQ, ось x — по QP_1, ось y — по MN; всем этим вполне определено направление и оси z, как перпендикулярное к осям t, x, y. Пусть вектор ускорения в P есть $\ddot{x}$, $\ddot{y}$, $\ddot{z}$, $\ddot{t}$, вектор движения в P_1 — $\dot{x}_1$, $\dot{y}_1$, $\dot{z}_1$, $\dot{t}_1$. В таком случае *движущий вектор силы, с которым первый произвольно движущийся электрон e действует на второй произвольно движущийся электрон e_1 в P_1, будет равен*

$$-ee_1\left(\dot{t}_1 - \frac{\dot{x}_1}{c}\right)\mathrm{K},$$

причем для компонент K_x, K_y, K_z, K_t вектора K *существуют три соотношения*:

$$c\mathrm{K}_t - \mathrm{K}_x = \frac{1}{r^2}, \quad \mathrm{K}_y = \frac{\ddot{y}}{c^2 r}, \quad \mathrm{K}_z = 0.$$

Кроме того, *в качестве четвертого соотношения этот вектор* K *должен быть перпендикулярен к вектору движения в P_1, что является единственным обстоятельством, связывающим его с последним вектором.*

Если сравнить с этим заключением прежние формилировки того же элементарного закона о пондеромоторном действии друг на друга движущихся точечных зарядов, то мы будем вынуждены признать, что рассматриваемые здесь соотношения вскрываются в своей столь простой внутренней сущности только в четырех измерениях, а в заранее навязанном нам

[1]) A. Liénard, Champ électrique et magnétique produit par une charge concentrée en un point et animée d'un mouvement quelconque, L'Eclairage électrique **16**, 5, 1898; 53, 106; E. Wiechert, Elektrodynamische Elementargesetze, Arch. néerl. (2) **5**, 549, 1900.

трехмерном пространстве оказываются лишь весьма запутанными проекциями.

В механике, реформированной в согласии с мировым постулатом, исчезают сами собой дисгармонии, которые являлись причиной помех между ньютоновой механикой и новейшей электродинамикой. Мне хотелось бы еще коснуться вопроса о положении *закона притяжения Ньютона* по отношению к этому постулату. Допустим, что, когда две точечные массы m, m_1 описывают свои мировые линии, то на m_1 действует со стороны m движущий вектор силы, точно такого же вида, как и в случае электронов, но в котором только вместо $-ee_1$ теперь стоит $+mm_1$. Рассмотрим специально тот случай, когда вектор ускорения для массы m постоянно равен нулю, причем введем t так, чтобы m было воспринято как покоящаяся масса; кроме того пусть движение массы m_1 происходит только под действием движущего вектора силы, обусловленной массой m. Если мы изменим этот указанный нами вектор, присоединив к нему множитель

$$t^{-1} = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

который с точностью до величин порядка $\frac{1}{c^2}$ равен 1, то окажется [1]), что для координат местонахождения x_1, y_1, z_1 массы m_1 в их зависимости от времени в точности получаются законы Кеплера, причем вместо моментов времени t_1 в них стоит собственное время τ_1 массы m_1. На основании этого простого замечания можно заключить, что предложенный закон притяжения, в связи с новой механикой, не хуже объясняет астрономические наблюдения, чем ньютонов закон притяжения, в связи с механикой Ньютона.

[1]) H. Minkowski, loc. cit., стр. 110.

Точно так же и основные уравнения для электромагнитных явлений в весомых телах вполне подчиняются мировому постулату. Нет даже никакой надобности отказываться от предложенного Лоренцом вывода этих уравнений на основании представлений электронной теории, как будет мною показано в другом месте.

Мне хочется верить, что не имеющая исключений справедливость мирового постулата является истинной основой электромагнитной картины мира, основой, которая была найдена Лоренцом, очищена далее Эйнштейном и которая теперь предстала пред нами во всей ясности.

При дальнейшей разработке математических следствий, найдется достаточно указаний для экспериментальной проверки истинности постулата для того, чтобы примирить с ним, на основе идеи о предустановленной гармонии между чистой математикой и физикой, и тех, которым неприятно или больно оставить привычные воззрения.

ПРИМЕЧАНИЯ. А. ЗОММЕРФЕЛЬДА.

Само собой разумеется, что в новом издании „Пространства и времени“ Минковского ни одно слово текста не должно было подвергнуться изменению. Я также опасался, что ссылки на примечания, которые следуют здесь, могут помешать удовольствию читателя. Примечания сами по себе не существенны; их цель устранить небольшие формально-математические трудности, которые могли бы помешать проникновению в великие идеи Минковского. На литературу, примыкающую к Минковскому, делаются ссылки постольку, поскольку она находится в непосредственной связи с предметом этого доклада. С физической точки зрения, все сказанное здесь Минковским остается попрежнему в силе (за исключением последнего замечания о законе притяжения Ньютона). Другим вопросом является: как следует отнестись с теорико-познавательной стороны к трактовке проблемы пространства и времени Минковским — и как мне кажется, вопросом, который не особенно затрагивает физическую сторону дела.

1) Стр. 189, строка 4: „С другой стороны понятие твердого тела имеет смысл только лишь в механике с группой G''_{∞}. Это положение в полной мере подтвердилось в дискуссии, которая возникла год спустя после смерти Минковского в связи с одной работой его ученика М. Борна. М. Борн назвал (Ann. d. Phys. **30**, 1, 1909) относительно твердым такое тело, в котором каждый элемент объема и при ускоренных движениях испытывает соответствующее его скорости лоренцово сокращение. Эренфест показал (Phys. Zeitschr. **10**, 918, 1909),что такое тело не может быть приведено во вращение. Херглоц (Ann. d. Phys. **31**, 393, 1910) и Нетер (Ann. d. Phys. **31**, 919, 1910) показали, что оно имеет только три степени свободы. Была сделана попытка определить относительно твердое тело с шестью или с девятью степенями свободы. В противовес этому Планк высказал мнение (Phys. Zeitschr. **11**, 294, 1910), что теория относительности может оперировать только с более или менее упругими телами, и Лауэ доказал (Phys. Zeitschr. **12**, 48, 1911), методами Минковского, пользуясь рис. 2 этого доклада, что в теории относительности каждое твердое тело должно иметь бесконечно много степеней свободы. Наконец, Херглоц (Ann. d.

Phys. **36**, 453, 1911) развил релятивистскую теорию упругости, согласно которой упругие напряжения возникают тогда, когда тело движется, не будучи при этом относительно твердым в понимании Борна. Относительно-твердое тело играет в этой теории упругости такую же роль, какую обыкновенное твердое тело в обыкновенной теории упругости.

2) К стр. 190, строка 30 „Из простого расчета следует, что, если $\frac{dx}{dt}$ для второй полосы равно v, то

$$OD' = OC \cdot \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}\,.\text{“}$$

Пусть на рис. 1,

$$\alpha = \sphericalangle A'OA, \quad \beta = \sphericalangle B'OA' = \sphericalangle C'OB',$$

причем равенство последних двух углов следует из симметричного положения асимптот относительно новых координатных осей (сопряженные диаметры гиперболы). В силу равенства $\alpha+\beta=\frac{\pi}{4}$, имеем

$$\sin 2\beta = \cos 2\alpha.$$

Применив теорему синусов к треугольнику $OD'C'$, имеем:

$$\frac{OD'}{OC'} = \frac{\sin 2\beta}{\cos\alpha} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha}$$

или, так как $OC' = OA'$:

$$OD' = OA' \frac{\cos 2\alpha}{\cos\alpha} = OA' \cos\alpha \cdot (1 - \mathrm{tg}^2\,\alpha). \qquad (1)$$

x, t—координаты точки A' в системе (x, t), следовательно, $x \cdot OA$ или $ct \cdot OC = ct \cdot OA$ суть соответствующие расстояния до координатных осей; тогда:

$$\left.\begin{aligned} x \cdot OA = \sin\alpha \cdot OA', \quad ct \cdot OA = \cos\alpha \cdot OA', \\ \frac{x}{ct} = \operatorname{tg}\alpha = \frac{v}{c} \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Подставив эти значения для x и ct в уравнение гиперболы, получим:

$$\left.\begin{aligned} OA'^2(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = OA^2, \\ OA' = \frac{OA}{\cos\alpha\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}, \end{aligned}\right\} \quad (3)$$

следовательно, в силу (1) и (2)

$$OD' = OA\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha} = OA\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}. \quad (4)$$

Это и есть, в силу равенства $OA = OC$, подлежащая доказательству формула.

Далее, в прямоугольном треугольнике OCD:

$$OD = \frac{OC}{\cos\alpha} = \frac{OA}{\cos\alpha}.$$

Равенство (3) может быть поэтому написано и так:

$$OA' = \frac{OD}{\sqrt{1-\operatorname{tg}^2\alpha}}, \text{ или } \frac{OD}{OA'} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}.$$

Это вместе с (4) дает пропорцию:

$$OD : OA' = OD' : OA,$$

которая, в силу равенств

$$OA' = OC' \text{ и } OA = OC,$$

идентична с пропорцией:

$$OD : OC' = OD' : OC,$$

примененной на стр. 191 строка 13.

3) Стр. 194, строка 4. „Всякая мировая точка, находящаяся между передним и задним конусами от O, может быть сделана, при помощи соответствующей координатной системы одновременной с O, но также и более ранней, чем O, или более поздней, чем O“. К этому сводит Лауэ доказательство следующего эйнштейновского положения (Phys. Zeitschr. 12, 48, 1911): по теории относительности ни одно событие, обладающее причинной связью, не может распространяться со скоростью, превышающей скорость света („скорость сигнала $\leqq c$“). Предположим, что событие O вызывает другое событие P и что мировая точка P лежит в промежуточной области для O. В этом случае действие передается из O в P со сверх-световой скоростью относительно рассматриваемой координатной системы (x, t), в которой, конечно, следствие P воспринимается позже, чем причина O, $t_p > 0$. Но теперь можно, согласно приведенной выше цитате, изменить координатную систему так, чтобы P оказалось раньше, чем O. Это значит, что можно бесконечно многими способами систему (x', t') выбрать так, чтобы вышло $t_p' < 0$. Последнее несовместимо с представлением о причинности; итак, P должно лежать „по ту сторону от O“, т. е. в заднем конусе от O; это значит, что скорость распространения идущего из O импульса, от которого в мировой точке P должно последовать второе событие, — необходимо должна быть $\leqq c$.

Конечно и в теории относительности можно определить такие явления, которые распространяются со сверх-световой скоростью; геометрически, например, это очень просто сделать; но такие явления никогда не могут служить сигналами. Это значит, что невозможно по произволу пускать их в ход с тем, чтобы с их помощью в отдаленном месте приводить в действие, например, какое-либо реле. Например, могут существовать оптические среды, в которых „скорость света“ $> c$. Но в таком случае под скоростью света разумеется распространение фаз в бесконечном периодическом потоке волн. Эта скорость никогда не может быть применена для сигнализации. Напротив, фронт волны при всех обстоятельствах и при любых свойствах оптической среды распространяется со скоростью c. Ср., например, A. Sommerfeld, Festschrift Heinrich Weber (Leipzig, Teubner, 1912), стр. 338 или Annalen d. Physik **44**, 177, 1914.

4) Стр. 195, строка 10. Как отметил Минковский в одной из бесед со мною, элемент собственнего времени $d\tau$ не есть полный дифференциал. Таким образом, если соединить две мировые точки O и P двумя различными мировыми линиями 1 и 2, то

$$\int_1 d\tau \neq \int_2 d\tau.$$

Если первая мировая линия проходит параллельно оси t, вследствие чего первый переход в координатной системе, положенной в основу, означает покой, то легко видеть, что

$$\int_1 d\tau = t, \quad \int_2 d\tau < 1.$$

На этом основывается отмеченное Эйнштейном отставание движущихся часов по отношению к покоящимся. В основе этой мысли, как отметил Эйнштейн, лежит (недоказуемое) допущение, что движущиеся часы действительно указывают собственное время; это значит, что они указывают то время, которое соответствует мгновенному состоянию скорости, которое мыслится стационарным. Для того чтобы можно

было сравнивать движущиеся часы с часами, покоящимися в мировой точке P, первые, конечно, должны быть ускорены (путем изменения скоростей или направлений). Отставание движущихся часов указывает, следовательно, не столько на „движение“, сколько на „ускоренное движение“. Поэтому здесь нет противоречия с принципом относительности.

5) Стр. 196, строка 7. Обозначение „гипербола кривизны“ в точности скопировано с элементарного понятия „круг кривизны“. Аналогия делается аналитическим тождеством, если взять вместо действительной координаты времени t мнимую $u = ict$, следовательно, c-кратную координату s, примененную Минковским на стр. 199. Согласно стр. 193 уравнение промежуточной гиперболы в плоскости (x, t) имеет следующий вид:

$$x^2 - c^2t^2 = \rho^2 \quad (k = \rho)$$

и, следовательно, в плоскости (x, u),

$$x^2 + u^2 = \rho^2.$$

Если φ означает чисто мнимый угол, то это уравнение может быть написано в параметрической форме

$$x = \rho \cos \varphi, \quad u = \rho \sin \varphi.$$

На основании этого можно, как я предложил в Ann. d. Phys. (**33**, стр. 649, § 8), обозначить гиперболическое движение так же, как „циклическое движение“, в чем (увлечение поля, появление особого рода центробежной силы) особенно отчетливо будут выражены его главные свойства.

Для гиперболического движения имеем:

$$d\tau = \frac{1}{c}\sqrt{-dl^2 - dx^2} = \frac{\rho}{c}\left|d\varphi\right|,$$

следовательно:

$$\dot{x} = \frac{dx}{d\tau} = -ic\sin\varphi, \qquad \dot{u} = \frac{du}{d\tau} = +ic\cos\varphi,$$

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\cos\varphi, \qquad \ddot{u} = \frac{d\dot{u}}{d\tau} = \frac{c^2}{\rho}\sin\varphi.$$

Численная величина вектора ускорения при гиперболическом движении составляет поэтому $\frac{c^2}{\rho}$. Так как любая заранее заданная мировая линия касается гиперболы кривизны в трех точках, то для первой и для гиперболического движения общими являются вектор ускорения и его значение $\frac{c^2}{\rho}$, как указано на стр. 196.

Центром M циклического движения $x^2 + u^2 = \rho^2$ является, очевидно, точка $x = 0$, $u = 0$, и все точки гиперболы „отстоят“ от этого центра на постоянную величину ρ, т. е. на постоянную величину радиуса-вектора. ρ означает поэтому изображенный на рис. 3 отрезок MP.

6) Стр. 197, строка 17. В том, что силу X, Y, Z нужно помножить на $\dot{t} = \frac{dt}{d\tau}$ для получения „вектора силы“, можно убедиться следующим образом: по Минковскому вектор импульса (стр. 197) определяется через $m\dot{x}$, $m\dot{y}$, $m\dot{z}$, $m\dot{t}$. m означает „постоянную механическую массу“, или, как Минковский в другом месте еще яснее говорит, „покоящуюся массу“. Если придерживаться ньютоновского закона движения (производная от импульса по времени равна силе), то нужно положить:

$$\frac{d}{dt}m\dot{x} = X, \quad \frac{d}{dt}m\dot{y} = Y, \quad \frac{d}{dt}m\dot{z} = Z.$$

Помножив левые части на $\dot{t}$, получим компоненты

вектора в определении Минковского. Поэтому и $\dot{t}X$ $\dot{t}Y$, $\dot{t}Z$ являются первыми тремя компонентами „вектора силы“. Четвертая компонента T следует однозначно из требования, что вектор силы должен быть перпендикулярным к вектору движения. Уравнения Минковского для механики материальной точки гласят поэтому (при постоянной покоящейся массе) так:

$$m\ddot{x} = \dot{t}X, \quad m\ddot{y} = \dot{t}Y, \quad m\ddot{z} = \dot{t}Z, \quad m\ddot{t} = \dot{t}T.$$

Впрочем, допущение о постоянстве покоящейся массы можно оставить в силе лишь при условии, что при движении тела не меняется содержание энергии в нем (если движение, по обозначению Планка, совершается „адиабатически и изохорически“).

7) Стр. 199, 200, 201. Характерным для изложенных построений является их полная независимость от какой-нибудь специальной координатной системы. Эти построения дают, как это Минковский и постулирует, „взаимоотношения между мировыми линиями“ (или мировыми точками) в качестве „совершеннейшего выражения физических законов“. Координатные оси x, y, z, t принимаются во внимание лишь тогда, когда, как, например, при изложении электродинамического потенциала („четырехмерный потенциал“) последний (условно) должен быть разложен на скалярную и векторную части, которые с релятивистской точки зрения не должны иметь самостоятельного, инвариантного значения,

В качестве комментария к Минковскому я, пользуясь методами Минковского, вывел из уравнений Максвелла инвариантные аналитические выражения для четырехмерного потенциала и для пондеромоторного действия между двумя электронами; эти выражения могут служить заменой разбираемым здесь построениям Минковского (Ann. d. Phys. 33, 649, 1910, п. 7).

Так как точное обоснование их завело бы нас слишком далеко, то я отсылаю к упомянутой работе или к соответсвующим местам книги Лауэ [Das Relativitätsprinzip, Braunschweig (Vieweg) (1913) § 19]. Ср., далее, доклад Минковского „Das Relativitätsprinzip", Ann. d. Phys. **47**, 927, (1915), который был издан автором этих строк; в этом докладе четырехмерный потенциал был поставлен во главу угла всей электродинамики, которая благодаря этому была приведена к ее простейшему виду.

8) Стр. 200, строка 18. Инвариантное описание электромагнитного поля в виде „вектора второго рода" (для которого я предложил как будто начинающее прививаться обозначение „шестивектор") входит как весьма важная часть в концепцию электродинамики Минковского. В то время как идеи Минковского в отношении понятия о векторе первого рода (четырехвектор) были отчасти и раньше уже высказаны Пуанкаре (Rend. Circ. Mat. Palermo **21**, (1906), введение вектора второго рода (шестивектор) Минковским ново и существенно. Подобно шестивектору „силовой" винт в механике (т. е. сочетание отдельной силы и пары сил) зависит от 6 независимых параметров. Подобно тому, как в электромагнитном поле деление на электрическую и магнитную силу относительно, разложение сил, составляющих „силовой винт", как известно, может быть произведено весьма различным образом.

9) Стр. 202. Релятивистская форма ньютоновского закона, данная Минковским, оказывается для частного отмеченного в тексте случая исчезающего ускорения частным случаем более общей формы, предложенной Пуанкаре (в только что цитированной работе), но в учете ускорения она идет дальше последней работы. Из формулировки закона тяготения, данной Минковским или Пуанкаре, вытекает, что можно (раз-

личным образом) примирить закон Ньютона с теорией относительности. Этот закон понимается при этом как точечный закон, т. е. как своего рода дальнодействие. „Общая теория относительности", которую развил Эйнштейн, начиная с 1907 года, захватывает проблему тяготения глубже. В ней тяготение — что с современной точки зрения представляется неоспоримым — не только излагается как учение о некотором поле и описывается посредством пространственно-временных дифференциальных уравнений, но и органически связывается с принципом относительности, обобщенным для любых преобразований, в то время как, по мысли Минковского и Пуанкаре, оно было скорее лишь внешним образом приспособлено к постулату относительности. В общей теории относительности структура пространства и времени определяется из тяготения или вместе с ним. При этом принцип относительности — в дальнейшее развитие идей Минковского — формулируется том смысле, что он требует ковариантности физических величин в отношении всех точечных преобразований, причем коэффициенты инвариантного элемента линии должны тогда войти в физические законы.

10) Стр. 203. „Основные уравнения для электромагнитных процессов в движущихся телах" были изложены Минковским в Göttinger Nachrichten за 1907 г. Ему не суждено было довести до конца „вывод этих уравнений на основе представлений электронной теории". Наброски, относящиеся к этому вопросу, были разработаны Борном, и образуют вместе с „Основными уравнениями" первый том этой серии монографий[1]) (Лейпциг 1910).

[1]) Серия монографий под общим заглавием „Fortschritte der mathematischen Wissenschaften". Первый выпуск содержит работы Минковского. *Прим. ред.*